

## 二次函数知识点总结与练习

### 知识点一：二次函数的定义

#### 1. 二次函数的定义：

一般地，形如  $y=ax^2+bx+c$  ( $a, b, c$  是常数,  $a \neq 0$ ) 的函数，叫做二次函数。

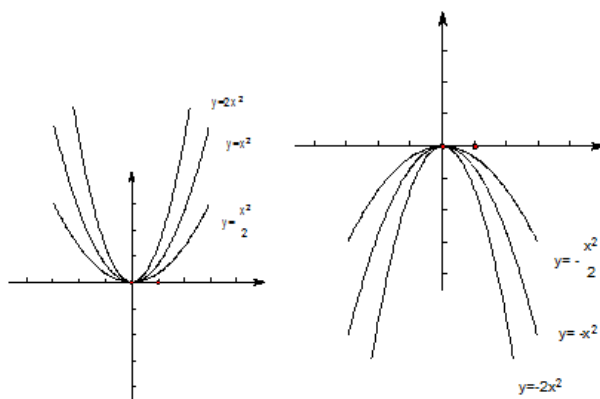
其中  $a$  是二次项系数， $b$  是一次项系数， $c$  是常数项。

### 知识点二：二次函数的图象与性质 $\Rightarrow \Rightarrow$ 抛物线的三要素：开口、对称轴、顶点

#### 2. 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与性质

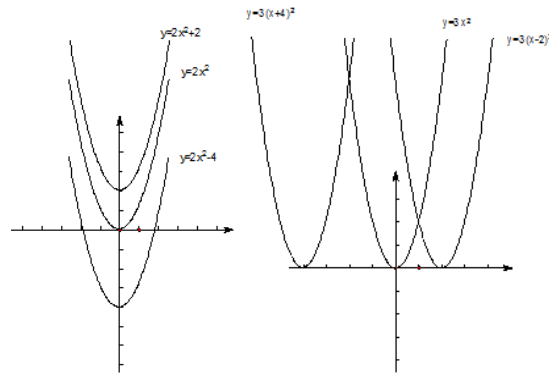
(1) 二次函数基本形式  $y=ax^2$  的图象与性质： $a$  的绝对值越大，抛物线的开口越小

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	性质
$a > 0$	向上	$(0, 0)$	y 轴	$x < 0$ 时，y 随 x 的增大而减小； $x > 0$ 时，y 随 x 的增大而增大； $x = 0$ 时，y 有最小值 0。
$a < 0$	向下	$(0, 0)$	y 轴	$x < 0$ 时，y 随 x 的增大而增大； $x > 0$ 时，y 随 x 的增大而减小； $x = 0$ 时，y 有最大值 0。



(2)  $y=ax^2+c$  的图象与性质：上加下减

$a$ 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	性质
$a > 0$	向上	$(0, c)$	$y$ 轴	$x < 0$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而减小; $x > 0$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而增大; $x = 0$ 时, $y$ 有最小值 $c$ .
$a < 0$	向下	$(0, c)$	$y$ 轴	$x < 0$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而增大; $x > 0$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而减小; $x = 0$ 时, $y$ 有最大值 $c$ .



(3)  $y = a(x-h)^2$  的图象与性质: 左加右减

$a$ 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	性质
$a > 0$	向上	$(h, 0)$	$x=h$	$x < h$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而减小; $x > h$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而增大; $x = h$ 时, $y$ 有最小值 $0$ .
$a < 0$	向下	$(h, 0)$	$x=h$	$x < h$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而增大; $x > h$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而减小; $x = h$ 时, $y$ 有最大值 $0$ .

(4) 二次函数  $y = a(x-h)^2 + k$  的图象与性质

$a$ 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	性质
$a > 0$	向上	$(h, k)$	$x=h$	$x < h$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而减小; $x > h$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而增大; $x = h$ 时, $y$ 有最小值 $k$ .
$a < 0$	向下	$(h, k)$	$x=h$	$x < h$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而增大; $x > h$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而减小; $x = h$ 时, $y$ 有最大值 $k$ .

### 3. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像与性质

(1) 当  $a > 0$  时, 抛物线开口向上, 对称轴为  $x = -\frac{b}{2a}$ , 顶点坐标为  $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ .

当  $x < -\frac{b}{2a}$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小; 当  $x > -\frac{b}{2a}$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大; 当  $x = -\frac{b}{2a}$  时,  $y$  有最小值  $\frac{4ac-b^2}{4a}$ .

(2) 当  $a < 0$  时, 抛物线开口向下, 对称轴为  $x = -\frac{b}{2a}$ , 顶点坐标为  $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ .

当  $x < -\frac{b}{2a}$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大; 当  $x > -\frac{b}{2a}$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小; 当  $x = -\frac{b}{2a}$  时,  $y$  有最大值  $\frac{4ac-b^2}{4a}$ .

### 4. 二次函数常见方法指导

#### (1) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象的画法

①画精确图 五点绘图法(列表-描点-连线)

利用配方法将二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  化为顶点式  $y = a(x-h)^2 + k$ , 确定其开口方向、对称轴及顶点坐标, 然后在对称轴两侧, 左右对称地描点画图.

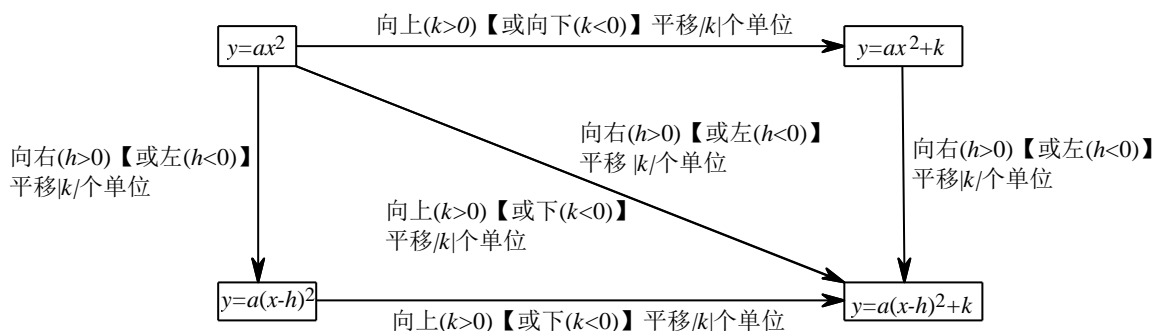
②画草图 抓住以下几点: 开口方向, 对称轴, 与  $y$  轴的交点, 顶点.

#### (2) 二次函数图象的平移

平移步骤:

① 将抛物线解析式转化成顶点式  $y = a(x-h)^2 + k$ , 确定其顶点坐标  $(h, k)$ ;

② 可以由抛物线  $ax^2$  经过适当的平移得到具体平移方法如下:



平移规律: 概括成八个字“左加右减, 上加下减”.

#### (3) 用待定系数法求二次函数的解析式

①一般式:  $y = ax^2 + bx + c$ . 已知图象上三点或三对  $x$ 、 $y$  的值, 通常选择一般式.

②顶点式:  $y = a(x-h)^2 + k$ . 已知图象的顶点或对称轴, 通常选择顶点式.

③交点式:  $y = a(x-x_1)(x-x_2)$ . 已知图象与  $x$  轴的交点坐标  $x_1$ 、 $x_2$ , 通常选择交点式.

#### (4) 求抛物线的顶点、对称轴的方法

①公式法:  $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ ,  $\therefore$  顶点是  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ , 对称轴是直线  $x = -\frac{b}{2a}$ .

②配方法: 运用配方的方法, 将抛物线的解析式化为  $y = a(x-h)^2 + k$  的形式, 得到顶点为  $(h, k)$ , 对称轴是直线  $x = h$ .

③运用抛物线的对称性: 由于抛物线是以对称轴为轴的轴对称图形, 所以对称轴的连线的垂直平分线是抛物线的对称轴, 对称轴与抛物线的交点是顶点.

#### (5) 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 中, $a, b, c$ 的作用

①  $a$  决定开口方向及开口大小, 这与  $y = ax^2$  中的  $a$  完全一样.

②  $b$  和  $a$  共同决定抛物线对称轴的位置

由于抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  的对称轴是直线  $x = -\frac{b}{2a}$ , 故

如果  $b = 0$  时, 对称轴为  $y$  轴;

如果  $\frac{b}{a} > 0$  (即  $a$ 、 $b$  同号) 时, 对称轴在  $y$  轴左侧;

如果  $\frac{b}{a} < 0$  (即  $a$ 、 $b$  异号) 时, 对称轴在  $y$  轴右侧.

③  $c$  的大小决定抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与  $y$  轴交点的位置

当  $x = 0$  时,  $y = c$ , 所以抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与  $y$  轴有且只有一个交点  $(0, c)$ , 故

如果  $c = 0$ , 抛物线经过原点;

如果  $c > 0$ , 与  $y$  轴交于正半轴;

如果  $c < 0$ , 与  $y$  轴交于负半轴.

## 二次函数基础练习题

1. 与抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5$  的形状大小相同，开口方向相反的抛物线是 ( )

A.  $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$                       B.  $y = -\frac{1}{2}x^2 - 7x + 8$

C.  $y = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 10$                       D.  $y = -x^2 + 3x - 5$

2. 二次函数  $y = x^2 + bx + c$  的图象上有两点(3, -8)和(-5, -8)，则此抛物线的对称轴是 ( )

A.  $x = 4$               B.  $x = 3$               C.  $x = -5$               D.  $x = -1$ .

3. 抛物线  $y = x^2 - mx - m^2 + 1$  的图象过原点，则  $m$  为 ( )

A. 0                      B. 1                      C. -1                      D.  $\pm 1$

4. 已知抛物线  $y = ax^2 + x + c$  与  $x$  轴一个交点的横坐标是-1，那么  $a+c =$  ( )

A. 0                      B. 1                      C. -1                      D. 2

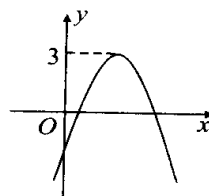
5. 把二次函数  $y = x^2 - 2x - 1$  配方成顶点式为 ( )

A.  $y = (x-1)^2$                       B.  $y = (x-1)^2 - 2$

C.  $y = (x+1)^2 + 1$                       D.  $y = (x+1)^2 - 2$

6. 直角坐标平面上将二次函数  $y = -2(x-1)^2 - 2$  的图象向左平移 1 个单位，再向上平移 1 个单位，则其顶点为 ( )

A. (0, 0)                      B. (1, -2)  
C. (0, -1)                      D. (-2, 1)



7. 函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象如图所示，那么关于一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的根的情况是 ( )

A. 有两个不相等的实数根              B. 有两个异号的实数根  
C. 有两个相等的实数根              D. 没有实数根

8. 已知二次函数  $y = x^2 + mx + m - 5$ ，则抛物线与  $x$  轴交点个数 ( )

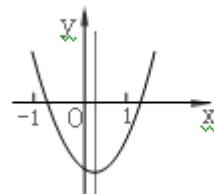
A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 不能确定，与  $m$  取何值有关

9. 函数  $y = kx^2 - 6x + 3$  的图象与  $x$  轴有交点，则  $k$  的取值范围是 ( )

A.  $k < 3$                       B.  $k < 3$  且  $k \neq 0$   
C.  $k \leq 3$                       D.  $k \leq 3$  且  $k \neq 0$

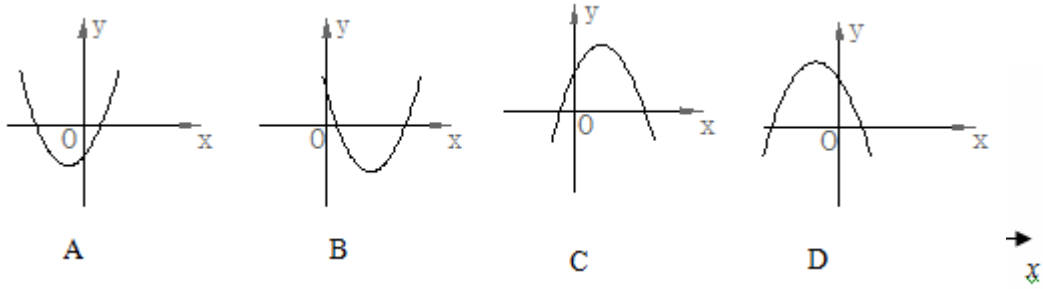
10. 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象如右图所示，则  $abc$ ， $b^2 - 4ac$ ， $2a + b$ ， $a + b + c$  这四个式子中，值为正数的有 ( )

A. 4 个                      B. 3 个                      C. 2 个                      D. 1 个

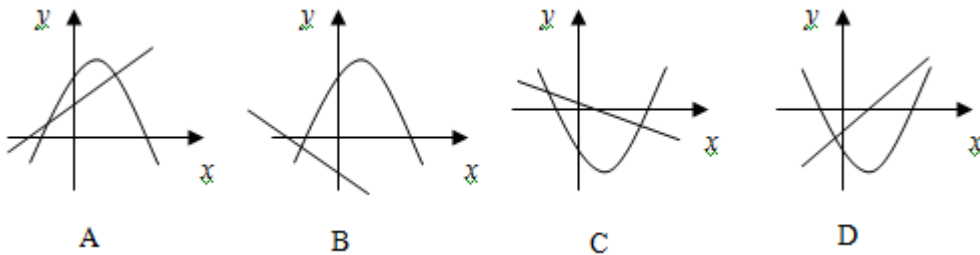


11. 已知正比例函数  $y = kx$  的图象在二、四象限，则二次函数

$y = 2kx^2 - x + k^2$  的图象大致为 ( )



12. 抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  和直线  $y = ax + b$  在同一坐标系的图象为 ( )

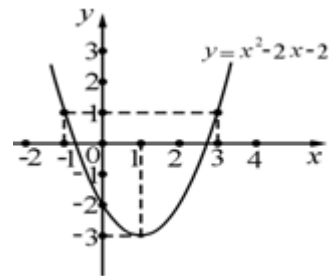


13. 二次函数  $y = 4x^2 - mx + 5$ , 当  $x < -2$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小; 当  $x > -2$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大; 则当  $x=1$  时,  $y$  的值为 ( )

- A. -7                      B. 1                      C. 17                      D. 25

14. 已知函数  $y = x^2 - 2x - 2$  的图象如右图所示, 根据其中提供的信息, 可求得使  $y \geq 1$  成立的  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $-1 \leq x \leq 3$                       B.  $-3 \leq x \leq 1$                       C.  $x \geq -3$                       D.  $x \leq -1$  或  $x \geq 3$



15. 已知抛物线  $y = x^2 + 4x + 3$ , 请回答以下问题:

- (1) 它的开口向\_\_\_\_\_, 对称轴是直线\_\_\_\_\_, 顶点坐标为\_\_\_\_\_.
- (2) 图象与  $x$  轴的交点为\_\_\_\_\_, 与  $y$  轴的交点为\_\_\_\_\_.

16. 抛物线  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  过第二、三、四象限, 则  $a$  \_\_\_\_\_ 0,  $b$  \_\_\_\_\_ 0,  $c$  \_\_\_\_\_ 0 (填 “>”, “<” 或 “=”).

17. 抛物线  $y = 6(x+1)^2 - 2$  可由抛物线  $y = 6x^2 - 2$  向\_\_\_\_\_平移\_\_\_\_\_个单位得到.

18. 顶点为  $(-2, -5)$  且过点  $(1, -14)$  的抛物线的解析式为\_\_\_\_\_.

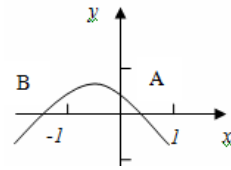
19. 对称轴是  $y$  轴且过点  $A(1, 3)$ 、点  $B(-2, -6)$  的抛物线的解析式为\_\_\_\_\_.

20. 抛物线  $y = -2x^2 + 4x + 1$  在  $x$  轴上截得的线段长度是\_\_\_\_\_.

21. 抛物线  $y = x^2 + (m-2)x + (m^2-4)$  的顶点在原点, 则  $m =$ \_\_\_\_\_.

22. 抛物线  $y = -x^2 - 2x + m$ , 若其顶点在  $x$  轴上, 则  $m =$ \_\_\_\_\_.

23. 抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  如右图所示, 其对称轴为  $x = -\frac{1}{2}$ , 设抛物线与  $x$  轴的两个交点分别为  $A$ 、 $B$ , 其中  $A$  的横坐标为  $\frac{1}{2}$ , 则  $B$  的横坐标为 \_\_\_\_\_;  $ax^2 + bx + c = 0$  的两个根为 \_\_\_\_\_.



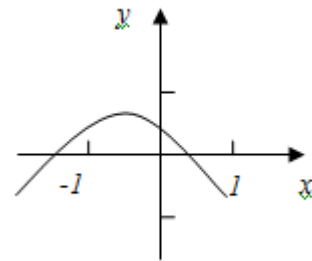
24. 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的值永远为负值的条件是  $a$  \_\_\_\_\_ 0,  $b^2 - 4ac$  \_\_\_\_\_ 0.

25. 一个二次函数的图象顶点坐标为  $(2, 1)$ , 形状与抛物线  $y = -2x^2$  相同, 这个函数解析式为 \_\_\_\_\_.

26. 二次函数  $y = 2x - x^2$ , 当  $x$  \_\_\_\_\_ 时,  $y$  随  $x$  增大而增大, 当  $x$  \_\_\_\_\_ 时,  $y$  随  $x$  增大而减小.

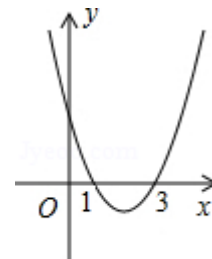
27. 如右图是  $y = ax^2 + bx + c$  的图象, 则(填 “>”, “<” 或 “=”)

$a$  \_\_\_\_\_ 0,  $b$  \_\_\_\_\_ 0,  $c$  \_\_\_\_\_ 0,  
 $a+b+c$  \_\_\_\_\_ 0,  $a-b+c$  \_\_\_\_\_ 0,  
 $b^2-4ac$  \_\_\_\_\_ 0,  $2a+b$  \_\_\_\_\_ 0



28. 已知  $y = ax^2 + bx + c$  中,  $a < 0$ , 抛物线与  $x$  轴有两个交点  $A(2, 0)$ ,  $B(-1, 0)$ , 则  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集是 \_\_\_\_\_;  $ax^2 + bx + c < 0$  的解集是 \_\_\_\_\_.

29. 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  如右图所示, 则其对称轴是 \_\_\_\_\_; 如果点  $A(-2, y_1)$ ,  $B(3, y_2)$  在抛物线上, 则  $y_1$  \_\_\_\_\_  $y_2$  (填 “>”, “<” 或 “=”).



30. 已知二次函数  $y = -x^2 + bx + c$  过四个点  $A(3, -5)$ ,  $B(-5, -5)$ ,  $C(-2, y_1)$ ,  $D(3, y_2)$ , 则  $y_1$  \_\_\_\_\_  $y_2$  (填 “>”, “<” 或 “=”).

31. 已知抛物线  $y = ax^2 + 2x + c$  与  $x$  轴的交点都在原点的右侧, 则点  $M(a, c)$  在第 \_\_\_\_\_ 象限.

32. 已知抛物线  $y = x^2 + bx + c$  与  $y$  轴交于点  $A$ , 与  $x$  轴的正半轴交于  $B$ 、 $C$  两点, 且  $BC=2$ ,  $S_{\triangle ABC}=3$ , 则  $c =$  \_\_\_\_\_.

33. 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  中, 其函数  $y$  与自变量  $x$  之间的部分对应值如下表所示, 则当  $x = 4$  时,  $y =$  \_\_\_\_\_.

$x$	.....	0	1	2	3
$y$	.....	4	1	0	1

34. 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  中，其函数  $y$  与自变量  $x$  之间的部分对应值如下表所示：

$x$	.....	0	1	2	3	4	.....
$y$	.....	4	1	0	1	4	.....

(1) 它的开口向\_\_\_\_\_，对称轴是直线\_\_\_\_\_，顶点坐标为\_\_\_\_\_.

(2) 图象与  $x$  轴的交点个数为\_\_\_\_\_，与  $y$  轴的交点坐标为\_\_\_\_\_.

(3) 求出二次函数的表达式，画出二次函数的精确图（题目已给出列表）.

(4) 点  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$  在函数的图象上，则当  $1 < x_1 < 2, 3 < x_2 < 4$  时， $y_1$

与  $y_2$  的大小关系正确的是 ( )

A.  $y_1 > y_2$

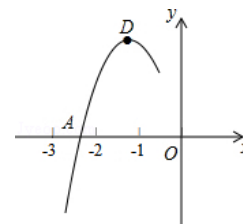
B.  $y_1 < y_2$

C.  $y_1 \geq y_2$

D.  $y_1 \leq y_2$

(5) 当  $y < 1$  时， $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

35. 抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  的顶点为  $D(-1, 2)$ ，与  $x$  轴的一个交点  $A$  在点  $(-3, 0)$  和  $(-2, 0)$  之间，其部分图象如图，则以下结论：①  $b^2 - 4ac < 0$ ；②  $a + b + c < 0$ ；③  $c - a = 2$ ；④ 方程  $ax^2 + bx + c - 2 = 0$  有两个相等的实数根；⑤ 抛物线与  $x$  轴的另一个交点在点  $(0, 0)$  和  $(1, 0)$  之间.



其中正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

36. 如图，在同一直角坐标系中，二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象与两坐标轴分别交于  $A$

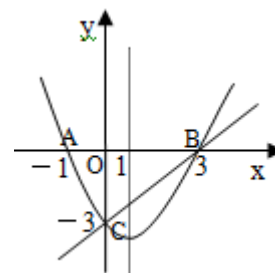
$(-1, 0)$ 、点  $B(3, 0)$  和点  $C(0, -3)$ ，一次函数  $y = mx + n$

的图象与抛物线交于  $B$ 、 $C$  两点.

(1) 一次函数、二次函数的解析式分别为\_\_\_\_\_.

(2) 当自变量  $x$  \_\_\_\_\_ 时，两函数的函数值都随  $x$  增大而增大.

(3) 当自变量 \_\_\_\_\_ 时，一次函数值大于二次函数值（即  $ax^2 + bx + c < mx + n$ ）.



(4) 方程  $ax^2 + bx + c - mx - n = 0$  有\_\_\_\_\_个根.