第三章圆

一. 圆的基本概念

※1. 圆的定义：

描述性定义：在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 随之旋转所形成的圆形叫做____；固定的端点 O 叫做____；线段 OA 叫做____；以点 O 为圆心的圆，记作⊙O，读作“圆 O”

集合性定义：圆是平面内到定点距离等于定长的点的集合。其中定点叫做___，定长叫做_____，圆心定圆的位置，半径定圆的大小，圆心和半径确定的圆叫做定圆。

对圆的定义的理解：①圆是一条封闭曲线，不是圆面；

②圆由两个条件唯一确定：一是圆心（即定点），二是半径（即定长）。

※2. 点与圆的位置关系及其数量特征：

如果圆的半径为 r，点到圆心的距离为 d，则 ①点在圆上 <===> d=r;②点在圆内 <===> d<r;③点在圆外 <===> d>r.其中点在圆上的数量特征是重点，它可用来证明若干个点共圆，方法就是证明这几个点与一个定点、的距离相等。

二. 圆的对称性:

※1. 与圆相关的概念：

①弦和直径：连接圆上任意两点的线段叫做___。直径：经过圆心的弦叫做______。

②弧、半圆、优弧、劣弧：

弧：圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧，用符号“⌒”表示，以 CD 为端点的弧记为“$\overset{\frown}{CD}$”，读作“圆弧 CD”或“弧 CD”。半圆：直径的两个端点分圆成两条弧，每一条弧叫做半圆。优弧：大于半圆的弧叫做优弧。劣弧：小于半圆的弧叫做劣弧。(为了区别优弧和劣弧，优弧用三个字母表示。)

③弓形：弦及所对的弧组成的图形叫做弓形。

④同心圆：圆心相同，半径不等的两个圆叫做同心圆。

⑤等圆：能够完全重合的两个圆叫做等圆，半径相等的两个圆是等圆。

⑥等弧：在同圆或等圆中，能够互相重合的弧叫做等弧。

⑦圆心角：顶点在圆心的角叫做圆心角.⑧弦心距:从圆心到弦的距离叫做弦心距.

※2. 圆是轴对称图形，直径所在的直线是它的对称轴，圆有无数条对称轴。

※3. 垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧。

推论：平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧。

说明：根据垂径定理与推论可知对于一个圆和一条直线来说，如果具备：

①过圆心；②垂直于弦；③平分弦；④平分弦所对的优弧；⑤平分弦所对的劣弧。

上述五个条件中的任何两个条件都可推出其他三个结论。

※4. 定理：在同圆或等圆中,相等的圆心角所对的弧相等、所对的弦相等、所对的弦心距相等。

推论: 在同圆或等圆中,如果两个圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距中有一组量相等,那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

三. 圆周角和圆心角的关系:

※1. 1°的弧的概念: 把顶点在圆心的周角等分成 360 份时,每一份的角都是 1°的圆心角,相应的整个圆也被等分成 360 份,每一份同样的弧叫 1°弧.

※2. 圆心角的度数和它所对的弧的度数相等.

这里指的是角度数与弧的度数相等,而不是角与弧相等.即不能写成∠AOB=$\overset{\frown}{AB}$,这是错误的.

※3. 圆周角的定义:顶点在圆上,并且两边都与圆相交的角,叫做圆周角.

※4. 圆周角定理:一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

※推论 1: 同弧或等弧所对的圆周角相等；反之，在同圆或等圆中，相等圆周角所对的弧也相等；

※推论 2: 半圆或直径所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径；

※推论 3：如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角

※四. 确定圆的条件:

※1. 理解确定一个圆必须的具备两个条件:圆心和半径,圆心决定圆的位置,半径决定圆的大小.经过一点可以作无数个圆,经过两点也可以作无数个圆,其圆心在这个两点线段的垂直平分线上.

※2. 经过三点作圆要分两种情况:

(1) 经过同一直线上的三点不能作圆.(2)经过不在同一直线上的三点,能且仅能作一个圆.

※定理: 不在同一直线上的三个点确定一个圆.

※3. 三角形的外接圆、三角形的外心、圆的内接三角形的概念:

(1)三角形的外接圆和圆的内接三角形: 经过一个三角形三个顶点的圆叫做这个三角形的外接圆,这个三角形叫做圆的内接三角形.

(2)三角形的外心: 三角形外接圆的圆心叫做这个三角形的外心.

(3)三角形的外心的性质:三角形外心到三顶点的距离相等.

五. 直线与圆的位置关系

※1. 直线和圆相交、相切相离的定义:

(1)相交: 直线与圆有两个公共点时,叫做直线和圆相交,这时直线叫做圆的割线.

(2)相切: 直线和圆有惟一公共点时,叫做直线和圆相切,这时直线叫做圆的切线,惟一的公共点做切点.(3)相离: 直线和圆没有公共点时,叫做直线和圆相离.

※2. 直线与圆的位置关系的数量特征:

设⊙O 的半径为 r，圆心 O 到直线的距离为 d；

①$d<r$ <===> 直线 L 和⊙O 相交.②$d=r$ <===> 直线 L 和⊙O 相切.

③$d>r$ <===> 直线 L 和⊙O 相离.

※3. 切线的总判定定理: 经过半径的外端并且垂直于这个条半径的直线是圆的切线.

※4. 切线的性质定理:圆的切线垂直于过切点的半径.

※推论 1 经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点.

※推论 2 经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心.

※分析性质定理及两个推论的条件和结论间的关系,可得如下结论:

如果一条直线具备下列三个条件中的任意两个,就可推出第三个.

①垂直于切线；②过切点；③过圆心.

※5. 三角形的内切圆、内心、圆的外切三角形的概念.

和三角形各边都相切的圆叫做三角形的内切圆,内切圆的圆心叫做三角形的内心, 这个三角形叫做圆的外切三角形.

※6. 三角形内心的性质:

(1)三角形的内心到三边的距离相等.

(2)过三角形顶点和内心的射线平分三角形的内角.

由此性质引出一条重要的辅助线: 连接内心和三角形的顶点,该线平分三角形的这个内角.

六. 圆和圆的位置关系.

※1. 外离、外切、相交、内切、内含(包括同心圆)这五种位置关系的定义.

(1)外离: 两个圆没有公共点,并且每个圆上的点都在另一个圆的外部时,叫做这两个圆外离.

(2)外切: 两个圆有惟一的公共点,并且除了这个公共点以外,每个圆上的点都在另一个圆的外部时, 叫做这两个圆外切.这个惟一的公共点叫做切点.

(3)相交: 两个圆有两个公共点,此时叫做这个两个圆相交.

(4)内切: 两个圆有惟一的公共点,并且除了这个公共点以外,一个圆上的都在另一个圆的内部时,叫做这两个圆内切.这个惟一的公共点叫做切点.

(5)内含: 两个圆没有公共点, 并且一个圆上的点都在另一个圆的内部时,叫做这两个圆内含.两圆同心是两圆内的一个特例.

※2. 两圆位置关系的性质与判定:

(1)两圆外离 <===> $d>R+r$　　(2)两圆外切 <===> $d=R+r$

(3)两圆相交 <===> $R-r<d<R+r\ (R\geqslant r)$　　(4)两圆内切 <===> $d=R-r\ (R>r)$

(5)两圆内含 <===> $d<R-r\ (R>r)$

※3. 相切两圆的性质:如果两个圆相切,那么切点一定在连心线上.

※4. 相交两圆的性质:相交两圆的连心线垂直平分公共弦.

七. 弧长及扇形的面积

※1. 圆周长公式:圆周长 $C=2\pi R$ (R 表示圆的半径)

※2. 弧长公式: 弧长 $l=\dfrac{n\pi R}{180}$ (R 表示圆的半径, n 表示弧所对的圆心角的度数)

※3. 扇形定义:一条弧和经过这条弧的端点的两条半径所组成的图形叫做扇形.

※4. 弓形定义:

由弦及其所对的弧组成的图形叫做弓形. 弓形弧的中点到弦的距离叫做弓形高.

※5. 圆的面积公式.圆的面积 $S=\pi R^2$ (R 表示圆的半径)

※6. 扇形的面积公式:

扇形的面积 $S_{扇形}=\dfrac{n\pi R^2}{360}$ (R 表示圆的半径, n 表示弧所对的圆心角的度数)

※弓形的面积公式:(如图 5)

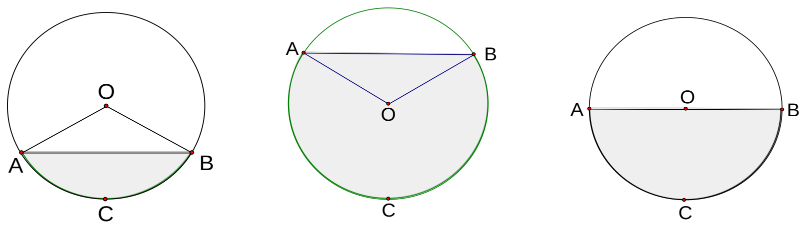


图 5

(1)当弓形所含的弧是劣弧时, $S_{弓形}=S_{扇形}-S_{三角形}$

(2)当弓形所含的弧是优弧时, $S_{弓形}=S_{扇形}+S_{三角形}$

(3)当弓形所含的弧是半圆时, $S_{弓形}=\dfrac{1}{2}\pi R^2=S_{扇形}$

八. 圆锥的有关概念:

※1. 圆锥可以看作是一个直角三角形绕着直角边所在的直线旋转一周而形成的图形,另一条直角边旋转而成的面叫做圆锥的底面,斜边旋转而成的面叫做圆锥的侧面.

※2. 圆锥的侧面展开图与侧面积计算:

圆锥的侧面展开图是一个扇形,这个扇形的半径是圆锥侧面的母线长、弧长是圆锥底面圆的周长、圆心是圆锥的顶点.

如果设圆锥底面半径为 r,侧面母线长(扇形半径)是 l, 底面圆周长(扇形弧长)为 c,那么它的侧面积是:

$$S_{侧}=\frac{1}{2}cl=\frac{1}{2}\cdot 2\pi rl=\pi rl \qquad S_{表}=S_{侧}+S_{底面}=\pi rl+\pi r^2=\pi r(r+l)$$

¤九. 与圆有关的辅助线

1.如圆中有弦的条件,常作弦心距,或过弦的一端作半径为辅助线.

2.如圆中有直径的条件,可作出直径上的圆周角.

3.如一个圆有切线的条件,常作过切点的半径(或直径)为辅助线.

4.若条件交代了某点是切点时,连结圆心和切点是最常用的辅助线.

¤十. 圆内接四边形

若四边形的四个顶点都在同一个圆上,这个四边形叫做圆内接四边形,这个圆叫做这个四边形的外接圆.

圆内接四边形的特征: ①圆内接四边形的对角互补; ②圆内接四边形任意一个外角等于它的内错角.

※十一.北师版数学未出现的有关圆的性质定理

1.切线长定理：从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角。

如图 6，∵PA，PB 分别切⊙O 于 A、B　　∴PA=PB，PO 平分∠APB

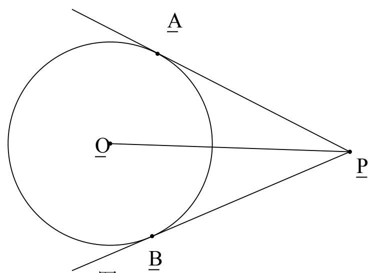


图 6

2．弦切角定理：弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角。 推论：如果两个弦切角所夹的弧相等，那么这两个弦切角也相等。如图 7，CD 切⊙O 于 C，则，∠ACD=∠B

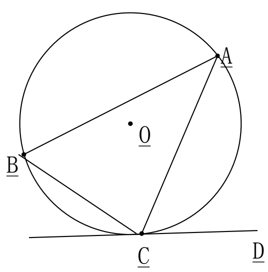


图 7

3．和圆有关的比例线段：

①相交弦定理：圆内的两条弦相交，被交点分成的两条线段长的积相等；

②推论：如果弦与直径垂直相交，那么弦的一半是它分直径所成的两条线段的比例中项。

如图 8，AP•PB=CP•PD　如图 9，若 CD⊥AB 于 P，AB 为⊙O 直径，则 CP^2=AP•PB

4．切割线定理

①切割线定理，从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项；

②推论：从圆外一点引圆的两条割线，这一点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积相等。

如图 10，　①PT 切⊙O 于 T，PA 是割线，点 A、B 是它与⊙O 的交点，则 $PT^2=PA\cdot PB$

②PA、PC 是⊙O 的两条割线，则 $PD\cdot PC=PB\cdot PA$

5．两圆连心线的性质

①如果两圆相切，那么切点一定在连心线上，或者说，连心线过切点。

②如果两圆相交，那么连心线垂直平分两圆的公共弦。

如图 11，⊙O_1 与⊙O_2 交于 A、B 两点，则连心线 $O_1O_2\perp AB$ 且 AC=BC。

6．两圆的公切线

两圆的两条外公切线的长及两条内公切线的长相等。

如图 12，AB 分别切⊙O_1 与⊙O_2 于 A、B，连结 O_1A，O_2B，过 O_2 作 $O_2C\perp O_1A$ 于 C，公切线长为 l，两圆的圆心距为 d，半径分别为 R，r 则外公切线长：$L=\sqrt{d^2-(R-r)^2}$

如图 13，AB 分别切⊙O_1 与⊙O_2 于 A、B，$O_2C\parallel AB$，$O_2C\perp O_1C$ 于 C，⊙O_1 半径为 R，⊙O_2 半径为 r，则内公切线长：$L=\sqrt{d^2-(R+r)^2}$

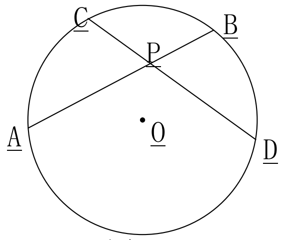


图 8

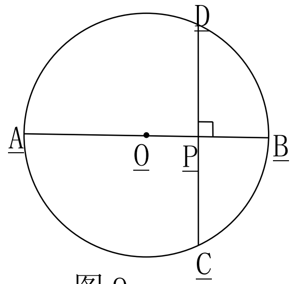


图 9

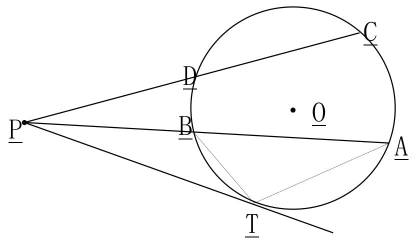


图 10

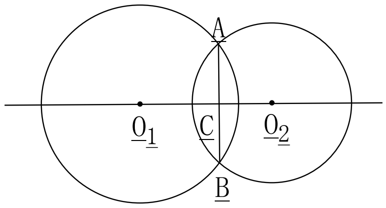


图 11

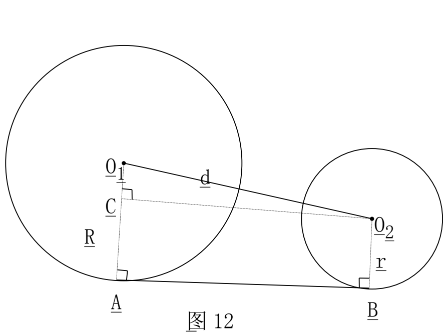


图 12

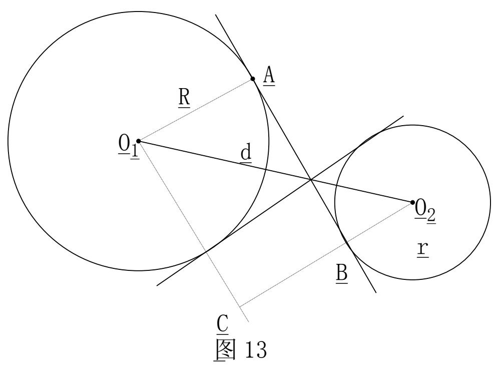
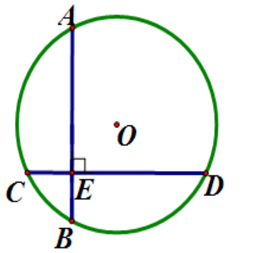


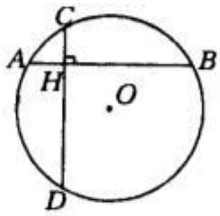
图 13

垂径定理拔高

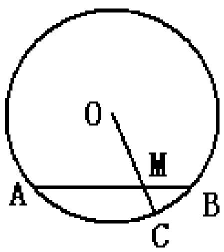
1. 如图，⊙O 的两条弦 AB、CD 互相垂直，垂足为 E，且 $AB=CD$，已知 $CE=1$，$ED=3$，则⊙O 的半径是________________.



【变式 1】如图所示，⊙O 两弦 AB、CD 垂直相交于 H，AH＝4，BH＝6，CH＝3，DH＝8，求⊙O 半径.

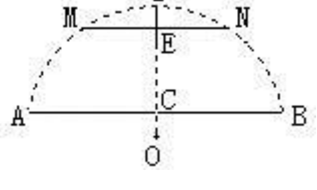


【变式 2】如图，AB 为⊙O 的弦，M 是 AB 上一点，若 AB＝20cm，MB＝8cm，OM＝10cm，求⊙O 的半径.



2. 已知：⊙O 的半径为 10cm，弦 AB∥CD，AB=12cm，CD=16cm，求 AB、CD 间的距离.(分类讨论)

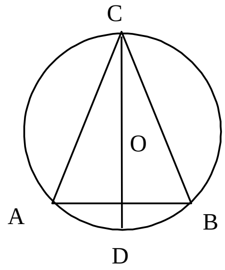
3、有一石拱桥的桥拱是圆弧形，如图所示，正常水位下水面宽 AB=60m，水面到拱顶距离 CD=18m，当洪水泛滥时，水面距拱顶不超过 3m 时拱桥就有危险，现在水面宽 MN=32m 时是否需要采取紧急措施？请说明理由.



测试题

一、选择题

1. 如图所示，三角形ABC的各顶点都在⊙O上，AC=BC，CD平分∠ACB，交圆O于点D， 下列结论：①CD是⊙O的直径；②CD平分弦AB；③ $AC=BC$；④ $AD=BD$；⑤CD⊥AB. 其中正确的有（　　）



A．2 个　　　B．3 个　　　C．4 个　　　D．5 个

2．下面四个命题中正确的是(　　).

A．平分一条直径的弦必垂直于这条直径

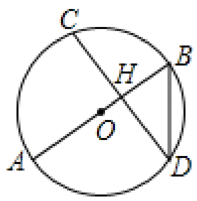
B．平分一条弧的直线垂直于这条弧所对的弦

C．弦的垂线必过这条弦所在圆的圆心

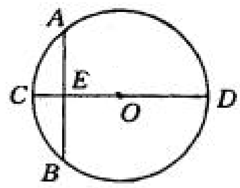
D．在一个圆内平分一条弧和它所对弦的直线必过这个圆的圆心

3. 如图，弦 CD 垂直于⊙O 的直径 AB，垂足为 H，且 CD= $2\sqrt{2}$，BD= $\sqrt{3}$，则 AB 的长为（　　）

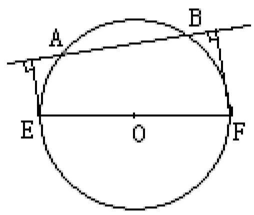
A．2　　　B.3　　　C.4　　　D.5



第 3 题



第 5 题



第 6 题

4．⊙O 的半径 OA＝1，弦 AB、AC 的长分别是 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$，则∠BAC 的度数为(　　).

A．15°　　　B．45°　　　C．75°　　　D．15°或 75°

5．“圆材埋壁”是我国古代著名数学著作《九章算术》中的一个问题，“今有圆材，埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何?”用现在的数学语言表述是：如图所示，CD 为⊙O 的直径，弦 AB⊥CD，垂足为 E，CE 为 1 寸，AB 为 10 寸，求直径 CD 的长.依题意，CD 长为(　　).

A． $\frac{25}{2}$ 寸　　　B．13 寸　　　C．25 寸　　　D．26 寸

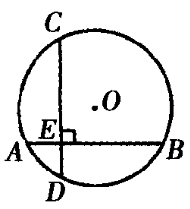
6．如图，EF 是⊙O 的直径，AB 是弦，EF=10cm，AB=8cm，则 E、F 两点到直线 AB 的距离之和为（　　).

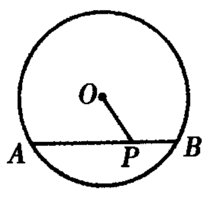
A．3cm　　　B．4cm　　　C．8cm　　　D．6cm

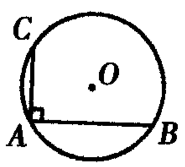
二、填空题

7. 如图，⊙O 的弦 AB 垂直于 CD，E 为垂足，AE=3，BE=7，则圆心 O 到 CD 的距离是____.

8．如图，P 为⊙O 的弦 AB 上的点，PA=6，PB=2，⊙O 的半径为 5，则 OP=______.







7 题图　　　　　　　　8 题图　　　　　　　　9 题图

9．如图，⊙O 的弦 AB 垂直于 AC，AB=6cm，AC=4cm，则⊙O 的半径等于______cm.

10．圆心都在y轴上的两圆相交于A、B两点，如果A点的坐标为$(2,\sqrt{2})$，那么B点的坐标为___.

11．在图 11 中，半圆的直径 AB=4cm，O 为圆心，半径 OE⊥AB，F 为 OE 的中点，CD∥AB，则弦 CD 的长为________.

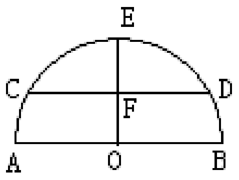
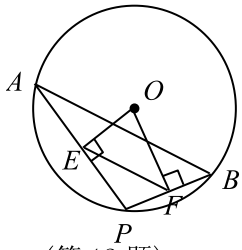


图 11

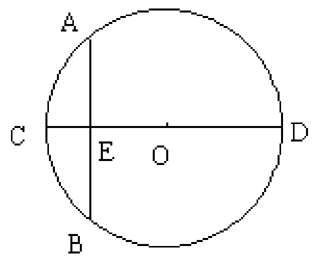


（第 12 题）

12．如图，点 A、B 是⊙O 上两点，AB=10，点 P 是⊙O 上的动点（P 与 A，B 不重合）连结 AP，PB，过点 O 分别作 OE⊥AP 于点 E，OF⊥PB 于点 F，则 EF=_________ .

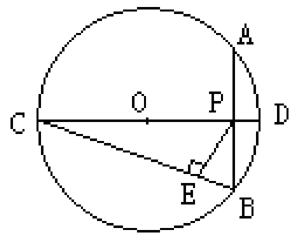
三、解答题

13.如图，在⊙O中，CD是直径，弦$AB\perp CD$，垂足为E，CD=15，$OE:OC=3:5$，求弦AB和AC的长.



14．如图所示，C 为 $\overset{\frown}{ACB}$ 的中点，CD 为直径，弦 AB 交 CD 于 P 点，PE⊥BC 于 E，若 BC=10cm，

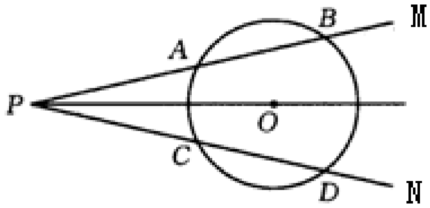
且 CE：BE=3：2，求弦 AB 的长.



15．如图所示，已知 O 是∠MPN 的平分线上的一点，以 O 为圆心的圆与角的两边分别交于点 A、B 和 C、D.

⑴求证：PB=PD.

⑵若角的顶点 P 在圆上或圆内,⑴中的结论还成立吗？若不成立,请说明理由;若成立,请加以证明.



16.如图，点 M，N 分别是 $\overset{\frown}{AB}$ 、 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，且 MN 交 AB 于 D，交 AC 于 E，

求证：△ADE 是等腰三角形.