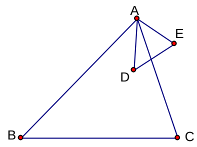
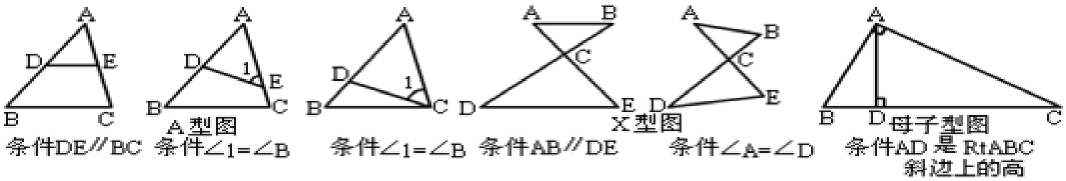
一招搞定相似三角形证明

一、相似、全等的关系

全等和相似是平面几何中研究直线形性质的两个重要方面，全等形是相似比为 1 的特殊相似形，相似形则是全等形的推广．因而学习相似形要随时与全等形作比较、明确它们之间的联系与区别；相似形的讨论又是以全等形的有关定理为基础.

二、两个三角形相似的六种图形：只要能在复杂图形中辨认出上述基本图形，并能根据问题需要添加适当的辅助线，构造出基本图形，从而使问题得以解决





三、三角形相似的证题思路：

1、判定两个三角形相似思路：

1）先找两对内角对应相等(对平行线型找平行线)，因为这个条件最简单；

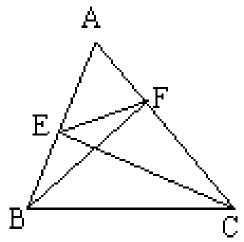
2）再而先找一对内角对应相等，且看夹角的两边是否对应成比例；

3）若无对应角相等，则只考虑三组对应边是否成比例；

2、相似形的传递性 若$\triangle_1∽\triangle_2$，$\triangle_2∽\triangle_3$，则$\triangle_1∽\triangle_3$

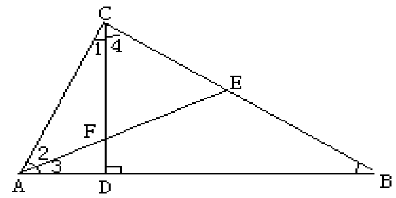
四、“三点定形法”，即由有关线段的三个不同的端点来确定三角形的方法。具体做法是：先看比例式前项和后项所代表的两条线段的三个不同的端点能否分别确定一个三角形，若能，则只要证明这两个三角形相似就可以了，这叫做“横定”；若不能，再看每个比的前后两项的两条线段的两条线段的三个不同的端点能否分别确定一个三角形，则只要证明这两个三角形相似就行了，这叫做“竖定”。有些学生在寻找条件遇到困难时，往往放弃了基本规律而去乱碰乱撞，乱添辅助线，这样反而使问题复杂化，效果并不好，应当运用基本规律去解决问题。

例 1、已知:如图, ΔABC 中, CE⊥AB, BF⊥AC. 求证: $\frac{AE}{AF}=\frac{AC}{BA}$ （判断“横定”还是“竖定”？ ）



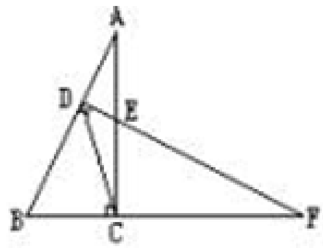
例 2、如图，CD 是 Rt△ABC 的斜边 AB 上的高，∠BAC 的平分线分别交 BC、CD 于点 E、F，AC•AE=AF•AB 吗？说明理由。

分析方法： 1）先将积式________________　2）________________（ “横定”还是“竖定”？ ）



例 3、 已知：如图，△ABC 中，$\angle ACB=90^0$，AB 的垂直平分线交 AB 于 D，交 BC 延长线于 F。求证：$CD^2=DE\cdot DF$。

分析方法：1）先将积式______________ 2）_____________（ “横定”还是“竖定”？ ）



五、过渡法（或叫代换法）

有些习题无论如何也构造不出相似三角形，这就要考虑灵活地运用“过渡”，其主要类型有三种，下面分情况说明.

（一）、 等量过渡法（等线段代换法）：遇到三点定形法无法解决欲证的问题时，即如果线段比例式中的四条线段都在图形中的同一条直线上，不能组成三角形，或四条线段虽然组成两个三角形，但这两个三角形并不相似，那就需要根据已知条件找到与比例式中某条线段相等的一条线段来代替这条线段，如果没有，可考虑添加简单的辅助线。然后再应用三点定形法确定相似三角形。只要代换得当，问题往往可以得到解决。当然，还要注意最后将代换的线段再代换回来。

例 4：如图 3，△ABC 中，AD 平分∠BAC， AD 的垂直平分线 FE 交 BC 的延长线于 E．求证：$DE^2=BE\cdot CE$.

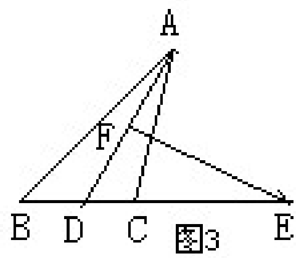


图3

（二）、 等比过渡法（等比代换法）：当用三点定形法不能确定三角形，同时也无等线段代换时，可以考虑用等比代换法，即考虑利用第三组线段的比为比例式搭桥，也就是通过对已知条件或图形的深入分析，找到与求证的结论中某个比相等的比，并进行代换，然后再用三点定形法来确定三角形。

例 5：如图 4，在△ABC 中，∠BAC=90°，AD⊥BC，E 是 AC 的中点，ED 交 AB 的延长线于点 F．求证：$\frac{AB}{AC}=\frac{DF}{AF}$．

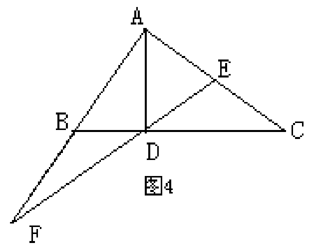


图4

（三）、等积过渡法（等积代换法）：思考问题的基本途径是：用三点定形法确定两个三角形，然后通过三角形相似推出线段成比例；若三点定形法不能确定两个相似三角形，则考虑用等量（线段）代换，或用等比代换，然后再用三点定形法确定相似三角形，若以上三种方法行不通时，则考虑用等积代换法。

例 6：如图，在△ABC 中，∠ACB=90°，CD 是斜边 AB 上的高，G 是 DC 延长线上一点，过 B 作 BE⊥AG，垂足为 E，交 CD 于点 F． 求证：CD^2＝DF·DG．

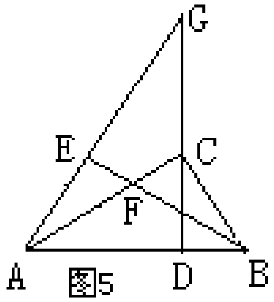


图5

六、证比例式和等积式

例 7、 如图，在△*ABC* 中，*AD*、*BE* 分别是 *BC*、*AC* 边上的高，*DF*⊥*AB* 于 *F*，交 *AC* 的延长线于 *H*，交 *BE* 于 *G*，求证：(1) *FG* / *FA*＝*FB* / *FH*　(2) *FD* 是 *FG* 与 *FH* 的比例中项． 1 说明：证明线段成比例或等积式，通常是借证三角形相似．找相似三角形用三点定形法(在比例式中，或横着找三点，或竖着找三点)，若不能找到相似三角形，应考虑将比例式变形，找等积式代换，或直接找等比代换

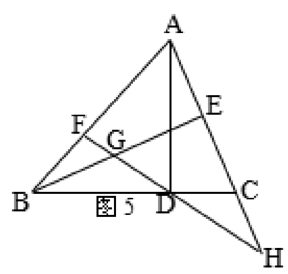


图 5

例 8、□*ABCD* 中，*E* 是 *BC* 上的一点，*AE* 交 *BD* 于点 *F*，已知 *BE*：*EC*＝3：1， $S_{\triangle FBE}$＝18，求：(1)*BF*：*FD*　　　　(2)$S_{\triangle FDA}$

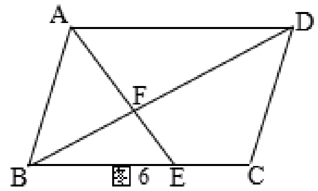
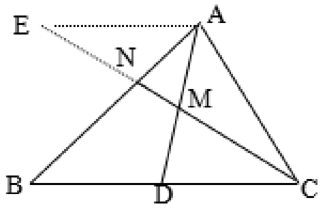
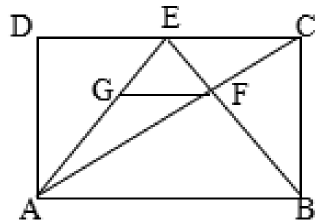


图 6

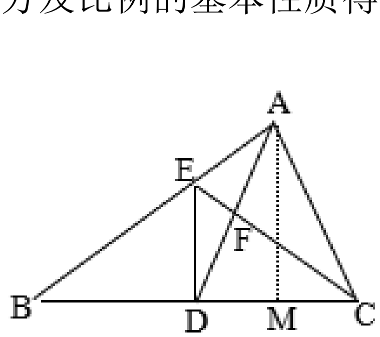
例 9 如图 7 在△*ABC* 中，*AD* 是 *BC* 边上的中线，*M* 是 *AD* 的中点，*CM* 的延长线交 *AB* 于 *N*. 求：*AN*：*AB* 的值；



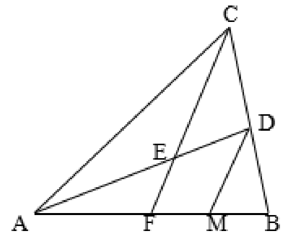
例 10、如图 8 在矩形 *ABCD* 中，*E* 是 *CD* 的中点，*BE*⊥*AC* 交 *AC* 于 *F*，过 *F* 作 *FG*//*AB* 交 *AE* 于 *G*. 求证：AG^2＝*AF*×*FC*　4 说明：证明线段的等积式，可先转化为比例式，再用等线段替换法，然后利用“三点定形法”确定要证明的两个三角形相似.



例 11、 如图在△*ABC* 中，*D* 是 *BC* 边的中点，且 *AD*＝*AC*，*DE*⊥*BC*，交 *AB* 于点 *E*，*EC* 交 *AD* 于点 *F*.(1)求证：△*ABC*∽△*FCD*；(2)若 $S_{\triangle FCD}$＝5，*BC*＝10，求 *DE* 的长.（说明：要证明两个三角形相似可由平行线推出或相似三角形的判定定理得两个三角形相似．再由相似三角形的面积比等于相似比的平方及比例的基本性质得到线段的长）。



例 12 如图 10 过△ABC的顶点 C 任作一直线与边 AB 及中线 AD 分别交于点 F 和 E. 过点 D 作 $DM// FC$ 交 AB 于点 M. (1)若 $S_{\triangle AEF}$：$S_{四边形 MDEF}=2:3$，求 AE：ED； (2)求证：$AE\times FB=2AF\times ED$　（说明：由平行线推出两个三角形相似，再由相似三角形的面积比等于相似比的平方及比例的基本性质得到两线段的比．注意平截比定理的应用．）



图

例 13、 已知如图 11 在正方形 $ABCD$ 的边长为 1，P 是 CD 边的中点，Q 在线段 BC 上，当 BQ 为何值时，△ADP 与△QCP 相似？

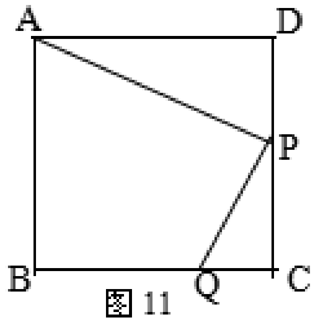


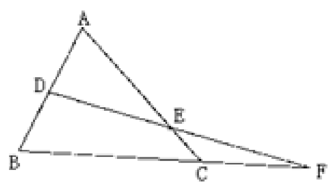
图 11

八、相似三角形中的辅助线

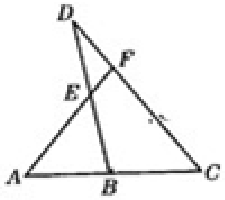
在添加辅助线时，所添加的辅助线往往能够构造出一组或多组相似三角形，或得到成比例的线段或得出等角，等边，从而为证明三角形相似或进行相关的计算找到等量关系。主要的辅助线有以下几种：

一）、作平行线

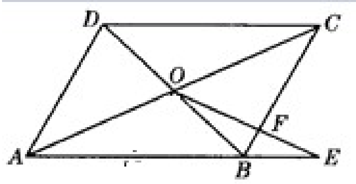
例 14、如图，△ABC 中，AB<AC，在 AB、AC 上分别截取 BD=CE，DE，BC 的延长线相交于点 F，证明：AB·DF=AC·EF。



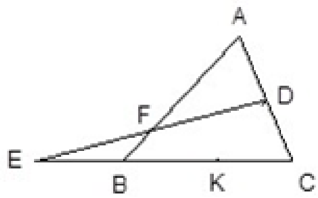
例 15、如图，B 为 AC 的中点，E 为 BD 的中点，则 AF：AE=____________.



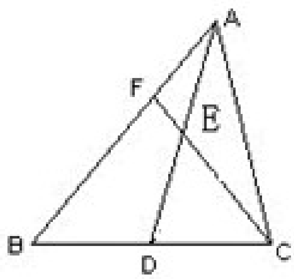
例 16、如图，已知平行四边形 ABCD 中，对角线 AC、BD 交于 O 点，E 为 AB 延长线上一点，OE 交 BC 于 F，若 AB=a，BC=b，BE=c，求 BF 的长.



例 17、△ABC 中，在 AC 上截取 AD，在 CB 延长线上截取 BE，使 AD=BE，求证：DF • AC=BC • FE

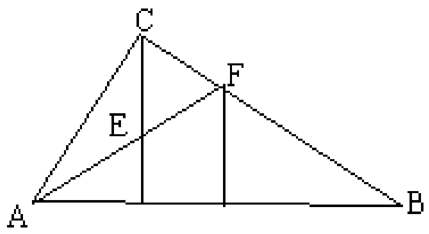


例 18：如图△ABC 中，AD 为中线，CF 为任一直线，CF 交 AD 于 E，交 AB 于 F，求证：AE：ED=2AF：FB。

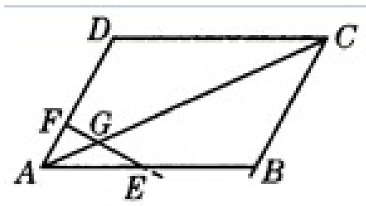


二）、作延长线

例 19. 如图，Rt△ABC 中，CD 为斜边 AB 上的高，E 为 CD 的中点，AE 的延长线交 BC 于 F，FG⊥AB 于 G，求证：FG^2=CF • BF



例 20．如图 4，已知平行四边 ABCD 中，E 是 AB 的中 点，$AF=\frac{1}{3}AD$，连 E、F 交 AC 于 G．求 AG：AC 的值．



三）、作中线

例 21：　已知：如图，△ABC 中，AB＝AC，BD⊥AC 于 D．求证：　$BC^2=2CD\cdot AC$．