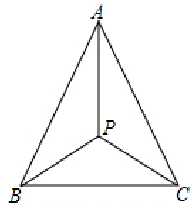
费马点相关问题

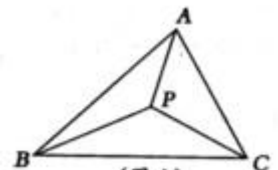
1、如图，点 P 是△ABC 内一动点，求证：当∠APB=∠BPC=∠APC=120°时，PA+PB+PC 取得最小值。



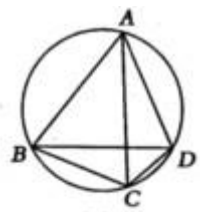
2、探究问题：

（1）阅读理解：①如图（A），在已知△*ABC*所在平面上存在一点 *P*，使它到三角形顶点的距离之和最小，则称点 *P* 为△*ABC* 的费马点，此时 *PA*＋*PB*＋*PC* 的值为△*ABC* 的费马距离．

②如图（B），若四边形 *ABCD* 的四个顶点在同一圆上，则有 *AB*・*CD*＋*BC*・*DA*＝*AC*・*BD*.此为托勒密定理．



（图A）



（图B）

（2）知识迁移：

①请你利用托勒密定理，解决如下问题：

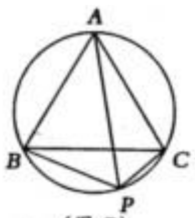
如图（C），已知点 *P* 为等边△*ABC* 外接圆的 $\overset{\frown}{BC}$ 上任意一点．求证：*PB*＋*PC*＝*PA*.

②根据（2）①的结论，我们有如下探寻△*ABC*（其中∠*A*、∠*B*、∠*C* 均小于 120°）的费马点和费马距离的方法：

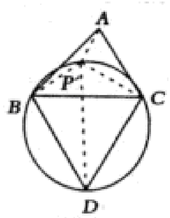
第一步：如图（D），在△*ABC* 的外部以 *BC* 为边长作等边△*BCD* 及其外接圆；

第二步：在 $\overset{\frown}{BC}$ 上任取一点 P′，连结 *P*′*A*、*P*′*B*、*P*′*C*、*P*′*D*．易知 *P*′*A*＋*P*′*B*＋*P*′*C*＝*P*′*A*＋（*P*′*B*＋*P*′*C*）＝*P*′*A*＋__________；

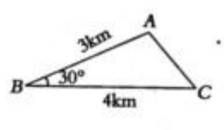
第三步：请你根据（1）①中定义，在图（D）中找出△*ABC* 的费马点 *P*，并请指出线段_______的长度即为△*ABC* 的费马距离．



（图C）



（图D）



（图E）

（3）知识应用：

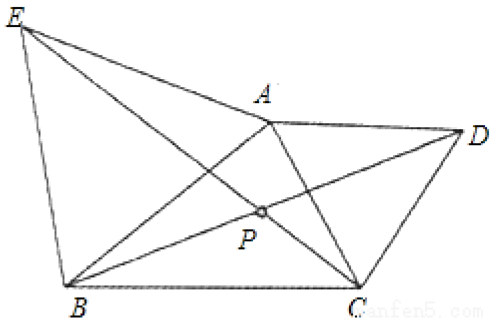
2010 年 4 月，我国西南地区出现了罕见的持续干旱现象，许多村庄出现了人、畜饮水困难，为解决老百姓的饮水问题，解放军某部来到云南某地打井取水．

已知三村庄 *A*、*B*、*C* 构成了如图（E）所示的△*ABC*（其中∠*A*、∠*B*、∠*C* 均小于 120°），现选取一点 *P* 打水井，使从水井 *P* 到三村庄 *A*、*B*、*C* 所铺设的输水管总长度最小，求输水管总长度的最小值．

3、已知：锐角△ABC，分别以 AB，AC 为边向外作正△ABE 和正△ACD，CE 和 BD 相交于 P 点．

①求∠CPD 的度数；

②求证：P 点为△ABC 的费马点．



4（三角形）如图 1，点 P 是等腰 Rt△ABC 内一动点，AB=$\sqrt{2}$，求 PA+PB+PC 的最小值。

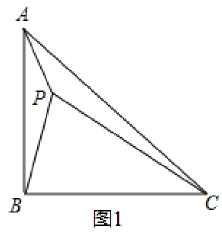
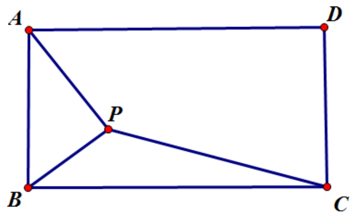
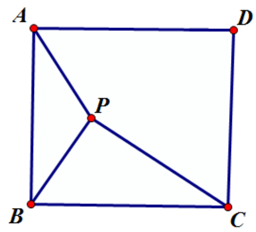


图1

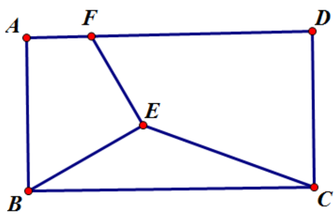
5(四边形)如图,在矩形 ABCD 中,AB=$2\sqrt{3}$,BC=6,P 为矩形 ABCD 内部的任意一点,求 PA+PB+PC 的最小值。



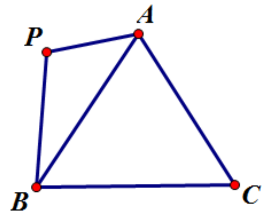
6（四边形）已知正方形 ABCD 内一动点 P 到 A、B、C 三点的距离之和的最小值为$\sqrt{2}+\sqrt{6}$,求此正方形的边长。



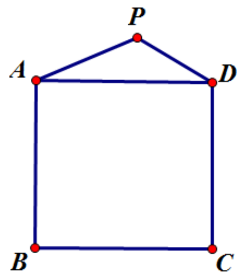
7、(动费马问题)矩形 ABCD 边 AD 上有一动点 F,矩形内有一动点 E,AB=6,BC=10,求 EF+EB+EC 的最小值。



8、（费马点思想）如图，设点 P 到等边三角形 ABC 两顶点 A、B 的距离分别为 $2\sqrt{3}$,3。则 PC 的最大值为________。



9、（费马点思想）如图，设点 P 到正方形 ABCD 两顶点 A、D 的距离分别为 2，$\sqrt{2}$。则 PC 的最大值为________。



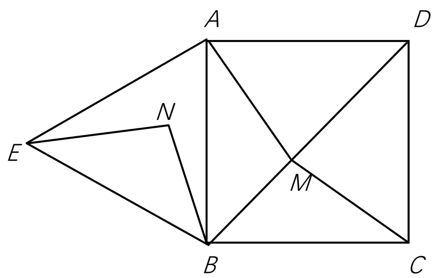
10、如图，四边形 *ABCD* 是正方形，△*ABE* 是等边三角形，*M* 为对角线 *BD*（不含 *B* 点）上任意一点，将 *BM* 绕点 *B* 逆时针旋转 60°得到 *BN*，连接 *EN*、*AM*、*CM*.

⑴ 求证：△*AMB*≌△*ENB*;

⑵ ①当 *M* 点在何处时，*AM*＋*CM* 的值最小；

②当 *M* 点在何处时，*AM*＋*BM*＋*CM* 的值最小，并说明理由；

⑶ 当 *AM*＋*BM*＋*CM* 的最小值为 $\sqrt{3}+1$ 时，求正方形的边长.



知识点补充：（1）平面内一点 P 到△ABC 三顶点的之和为 PA+PB+PC，当点 P 为费马点时，距离之和最小.

特殊三角形中：　(2)三内角皆小于 120°的三角形，分别以 AB，BC，CA，为边，向三角形外侧做正三角形 ABC_1，ACB_1，BCA_1，然后连接 AA_1，BB_1，CC_1，则三线交于一点 P，则点 P 就是所求的费马点.

(3)若三角形有一内角大于或等于 120 度，则此钝角的顶点就是所求.

(4)当△ABC 为等边三角形时，此时外心与费马点重合.