

题型十 反比例函数的图象与性质

(必考)

典例精讲

命题点 1 反比例函数的图象与性质(10年8考:2016~2018.13,2012~2014.15,2010.15,2009.13)

例 1 (2018 陕西 13 题 3 分)若一个反比例函数的图象经过点 $A(m, m)$ 和 $B(2m, -1)$, 则这个反比例函数的表达式为_____.

【思路点拨】可先设反比例函数的表达式为 $y = \frac{k}{x}$, 根据反比例函数的图象经过 A, B 两点, 代入即可得到 k 的值.

方法指导

对于反比例函数 $y = \frac{k}{x}$, 其比例系数 k 为常数, 且 $k = xy$, 所以若几个点都在同一个反比例函数的图象上, 则这些点的横、纵坐标之积都等于 k .

例 2 (2017 陕西 13 题 3 分)已知 A, B 两点分别在反比例函数 $y = \frac{3m}{x}$ ($m \neq 0$) 和 $y = \frac{2m-5}{x}$ ($m \neq \frac{5}{2}$) 的图象上. 若点 A 与点 B 关于 x 轴对称, 则 m 的值为_____.

【思路点拨】根据已知条件点 A 与点 B 关于 x 轴对称, 则可设 $A(x, y)$, 则 $B(x, -y)$, 将它们的坐标分别代入各自所在的函数解析式, 通过方程求 m 的值.

【温馨提示】对称点的坐标规律见 P13.

例 3 (2016 陕西 13 题 3 分)已知一次函数 $y = 2x + 4$ 的图象分别交 x 轴、 y 轴于 A, B 两点. 若这个一次函数的图象与一个反比例函数的图象在第一象限交于点 C , 且 $AB = 2BC$, 则这个反比例函数的表达式为_____.

【思路点拨】根据题意画出图象, 然后过交点 C 作 x 轴的垂线, 构造直角三角形, 然后通过相似三角形的性质, 列出比例式算出点 C 的坐标, 从而求得反比例函数的表达式.

方法指导

求反比例函数表达式只需要知道其图象上一点坐标即可,通常情况下所采取的方式是过反比例函数图象上的某一点向 x 轴, y 轴引垂线构造直角三角形,引垂线后所采用的解题思路有两种:①根据勾股定理将线段长度转化为点坐标计算;②引垂线后会出现与坐标轴平行的线,进而可以通过三角形相似计算出线段长度,最后表示出点坐标计算即可.

例4 (2013 陕西 15 题 3 分) 如果一个正比例函数的图象与反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象交于 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 两点,那么 $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ 的值为_____.

【思路点拨】正比例函数的图象与反比例函数的图象都是关于原点对称的,所以它们的交点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 也关于原点对称,因此 $x_1 = -x_2, y_1 = -y_2$,所以 $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = 2x_2 \cdot 2y_2 = 4x_2y_2$.

例5 (2012 陕西 15 题 3 分) 在同一平面直角坐标系中,若一个反比例函数的图象与一次函数 $y = -2x + 6$ 的图象无公共点,则这个反比例函数的表达式是_____. (只写出符合条件的一个即可)

【思路点拨】两个函数图象无公共点,则联立它们的解析式所得的方程无解. 本题中联立一次函数与反比例函数的解析式,可得一个一元二次方程,一元二次方程无解即根的判别式 $b^2 - 4ac < 0$.

方法指导

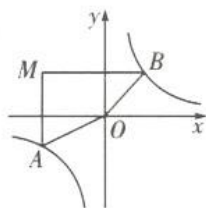
要判断一次函数与反比例函数图象有无交点,只要联立两个函数的解析式组成一个方程组,然后将方程组化成一元二次方程,再根据一元二次方程根的判别式来判断,若 $b^2 - 4ac > 0$,两个函数的图象有两个不同的交点,若 $b^2 - 4ac = 0$,两个函数的图象有一个交点,若 $b^2 - 4ac < 0$,两个函数的图象没有交点.

例6 (2009 陕西 13 题 3 分) 若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上的两点,且 $x_1 > x_2 > 0$,则 y_1 _____ y_2 . (填“>”、“=”、“<”)

【思路点拨】反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 中, $k = 3 > 0$,则反比例函数图象所在象限为第一、三象限,且 $x_1 > x_2 > 0$,则点 A, B 均在第一象限,根据反比例函数的增减性,在第一象限内 y 随 x 的增大而减小即可得解.

命题点2 反比例函数与图形面积(10年2考:2015.13,2011.8)

例7 (2015 陕西 13 题 3 分) 如图,在平面直角坐标系中,过点 $M(-3, 2)$ 分别作 x 轴、 y 轴的垂线与反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象交于 A, B 两点,则四边形 $MAOB$ 的面积为_____.



例7题图

【思路点拨】观察反比例函数图象可知,要求四边形 $MAOB$ 的面积,可将其分为一个矩形和两个直角三角形的面积之和. 设 MA, MB 与 x, y 轴交于点 C, D ,由反比例函数系数 k 的几何意义得 $\triangle BDO$ 和 $\triangle ACO$ 的面积,根据点 M 的坐标可得矩形 $MCOD$ 的面积,进而即可求解.

方法指导

要求不规则图形的面积,可将其转化为规则的几何图形进行求解.在反比例函数中,一旦涉及面积问题,首先想到将几何图形的面积转化为反比例函数系数 k 的几何意义常涉及的图形的面积进行求解.

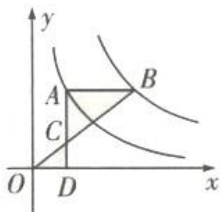
计算与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 上的点有关的图形面积:

$S_{\triangle AOP} = \frac{ k }{2}$	$S_{\text{矩形}OAPB} = k $	$S_{\triangle APP_1} = 2 k $ (P, P_1 关于原点对称)	$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOE} + S_{\triangle OEF} + S_{\triangle BOF}$

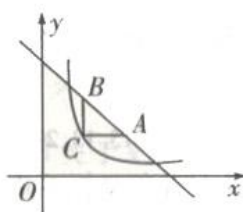
针对演练

命题点1 反比例函数的图象与性质

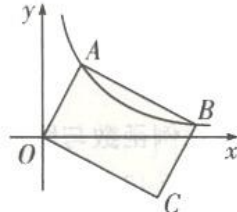
- 在反比例函数 $y = \frac{1+2m}{x}$ 的图象上有两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 当 $x_1 < 0 < x_2$ 时, 有 $y_1 < y_2$, 则 m 的取值范围是_____.
- 已知点 A 在双曲线 $y = -\frac{2}{x}$ 上, 点 B 在直线 $y = x - 4$ 上, 且 A, B 两点关于 y 轴对称, 设点 A 的坐标为 (m, n) , 则 $\frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ 的值是_____.
- 如图, 点 A 在双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上, 点 B 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上, $AB \parallel x$ 轴, 过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D . 连接 OB 与 AD 相交于点 C , 若 $AC = 2CD$, 则 k 的值为_____.



第3题图



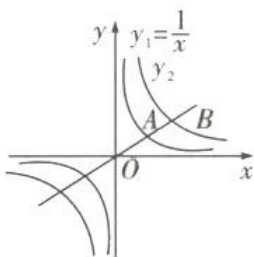
第4题图



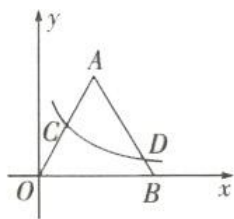
第5题图

- 如图, 过点 $C(1, 2)$ 分别作 x 轴、 y 轴的平行线, 交直线 $y = -x + 6$ 于 A, B 两点, 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象与 $\triangle ABC$ 有公共点, 则 k 的取值范围为_____.
- (2018 陕师大附中模拟) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 矩形 $OABC$ 的顶点 A, B 都在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 上, 若点 A 的坐标为 $(2, 4)$, 则点 C 的坐标为_____.

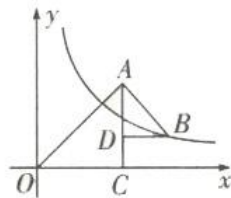
6. (2017 西安汇知中学模拟) 如图, 过原点 O 的直线与反比例函数 y_1, y_2 的图象在第一象限内分别交于点 A, B , 且 A 为 OB 的中点, 若函数 $y_1 = \frac{1}{x}$, 则 y_2 与 x 的函数表达式是_____.



第 6 题图



第 7 题图



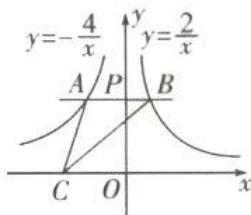
第 8 题图

7. (2018 西安铁一中模拟) 如图, 若双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 与边长为 3 的等边 $\triangle AOB$ (O 为坐标原点) 的边 OA, AB 分别交于 C, D 两点, 且 $OC = 2BD$, 则 k 的值为_____.

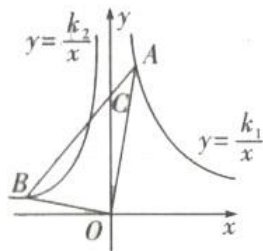
命题点 2 反比例函数与图形面积

8. (2018 西安高新一中模拟) 如图, $\triangle OAC$ 与 $\triangle BAD$ 都是等腰直角三角形, $\angle ACO = \angle ADB = 90^\circ$, 反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 在第一象限的图象经过点 B , 则 $\triangle OAC$ 与 $\triangle BAD$ 的面积之差 $S_{\triangle OAC} - S_{\triangle BAD} =$ _____.

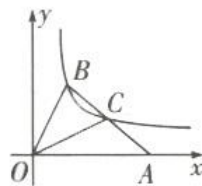
9. (2018 西安交大附中模拟) 如图, 过 y 轴上任意一点 P , 作 x 轴的平行线, 分别与反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 和 $y = \frac{2}{x}$ 的图象交于 A 点和 B 点, 若 C 为 x 轴上任意一点, 连接 AC, BC , 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.



第 9 题图



第 10 题图



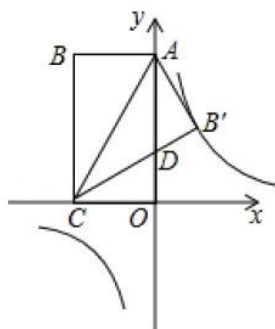
第 12 题图

10. (2018 西安铁一中模拟) 如图, $\triangle AOB$ 的顶点 A, B 分别在反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ 和 $y = \frac{k_2}{x}$ 上, AB 交 y 轴于 C 点, 若 $S_{\triangle OBC} = 3S_{\triangle OCA} = 3$, 则 $9k_1 - k_2 =$ _____.

11. (2018 西安高新一中模拟) 已知矩形 $ABCD$ 的四个顶点均在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上, 且点 A 的横坐标是 2, 则矩形 $ABCD$ 的面积为_____.

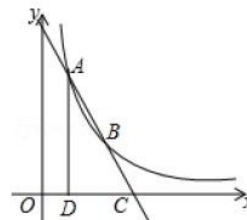
12. (2018 西工大附中模拟) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, $\triangle OAB$ 的顶点 A 在 x 轴正半轴上, OC 是 $\triangle OAB$ 的中线, 点 B, C 在反比例函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象上, 则 $\triangle OAB$ 的面积等于_____.

1. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 OABC 的顶点 A 在 y 轴上，C 在 x 轴上，把矩形 OABC 沿对角线 AC 所在的直线翻折，点 B 恰好落在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象上的点 B' 处，CB' 与 y 轴交于点 D，已知 $DB' = 2$ ， $\angle ACB = 30^\circ$.



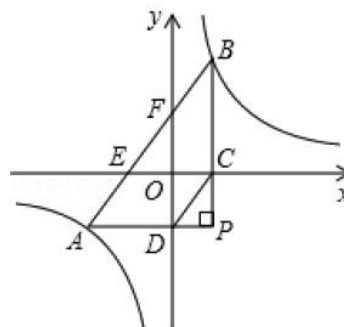
- (1) 求 $\angle B'CO$ 的度数;
- (2) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的函数表达式;
- (3) 若 Q 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 图象上的一点，在坐标轴上是否存在点 P，使以 P, Q, C, D 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在，请求出 P 点的坐标; 若不存在，请说明理由.

2. 如图，点 A (1, 4)、B (2, a) 在函数 $y = \frac{m}{x}$ ($x > 0$) 的图象上，直线 AB 与 x 轴相交于点 C， $AD \perp x$ 轴于点 D.



- (1) $m =$ _____;
- (2) 求点 C 的坐标;
- (3) 在 x 轴上是否存在点 E，使以 A、B、E 为顶点的三角形与 $\triangle ACD$ 相似? 若存在，求出点 E 的坐标; 若不存在，说明理由.

3. 如图，将透明三角形纸片 PAB 的直角顶点 P 落在第四象限，顶点 A、B 分别落在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象的两支上，且 $PB \perp x$ 于点 C， $PA \perp y$ 于点 D，AB 分别与 x 轴，y 轴相交于点 E、F. 已知 B (1, 3) .



- (1) $k =$ _____;
- (2) 试说明 $AE = BF$;
- (3) 当四边形 ABCD 的面积为 $\frac{21}{4}$ 时，求点 P 的坐标.