3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与性质

（1）当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，对称轴为 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

当 $x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最小值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

（2）当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，对称轴为 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

当 $x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最大值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

4. 二次函数常见方法指导

（1）二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象的画法

①画精确图 五点绘图法（列表-描点-连线）

利用配方法将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化为顶点式 $y=a(x-h)^2+k$，确定其开口方向、对称轴及顶点坐标，然后在对称轴两侧，左右对称地描点画图. 与x轴的交点坐标

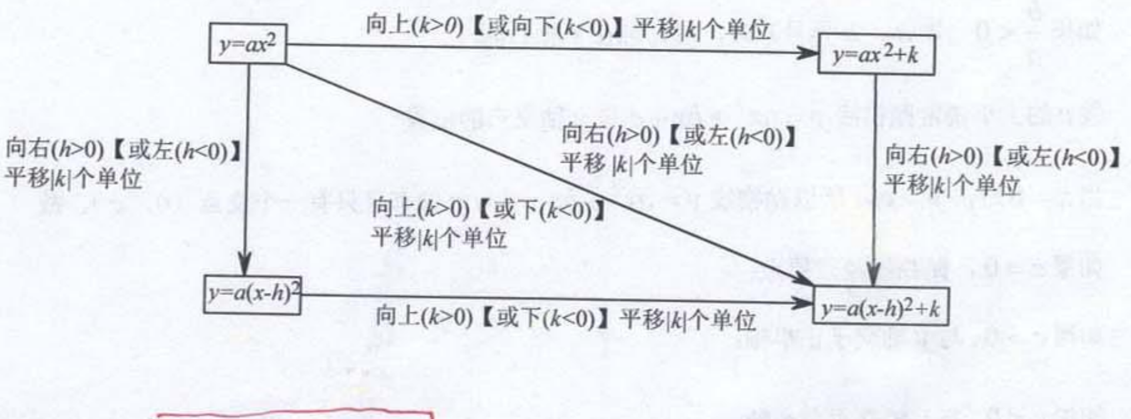
②画草图 抓住以下几点：开口方向，对称轴，与 y 轴的交点，顶点. 与x轴的交点

（2）二次函数图象的平移

平移步骤：

① 将抛物线解析式转化成顶点式 $y=a(x-h)^2+k$，确定其顶点坐标 $(h,\ k)$；

② 可以由抛物线 ax^2 经过适当的平移得到具体平移方法如下：



平移规律：概括成八个字“左加右减，上加下减”.

（3）用待定系数法求二次函数的解析式

①一般式：$y=ax^2+bx+c$．已知图象上三点或三对x、y的值，通常选择一般式．

②顶点式：$y=a(x-h)^2+k$．已知图象的顶点或对称轴，通常选择顶点式．

③交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$．已知图象与x轴的交点坐标x_1、x_2，通常选择交点式．

（4）求抛物线的顶点、对称轴的方法

①公式法：$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，∴顶点是$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴是直线$x=-\frac{b}{2a}$．

②配方法：运用配方的方法，将抛物线的解析式化为$y=a(x-h)^2+k$的形式，得到顶点为（h，k），对称轴是直线$x=h$．

③运用抛物线的对称性：由于抛物线是以对称轴为轴的轴对称图形，所以对称轴的连线的垂直平分线是抛物线的对称轴，对称轴与抛物线的交点是顶点．

（5）抛物线$y=ax^2+bx+c$中，a,b,c的作用

①a决定开口方向及开口大小，这与$y=ax^2$中的a完全一样．

②b和a共同决定抛物线对称轴的位置

由于抛物线$y=ax^2+bx+c$的对称轴是直线$x=-\frac{b}{2a}$，故

如果$b=0$时，对称轴为y轴；

如果$\frac{b}{a}>0$（即a、b同号）时，对称轴在y轴左侧；左同右异．

如果$\frac{b}{a}<0$（即a、b异号）时，对称轴在y轴右侧．

③c的大小决定抛物线$y=ax^2+bx+c$与y轴交点的位置

当$x=0$时，$y=c$，所以抛物线$y=ax^2+bx+c$与y轴有且只有一个交点（0，c），故

如果$c=0$，抛物线经过原点；

如果$c>0$，与y轴交于正半轴；

如果$c<0$，与y轴交于负半轴．

二次函数基础练习题

1．与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-5$ 的形状大小相同，开口方向相反的抛物线是（ C ）

A．$y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$　　B．$y=-\frac{1}{2}x^2-7x+8$

C．$y=\frac{1}{2}x^2+6x+10$　　D．$y=-x^2+3x-5$

2．二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象上有两点(3，−8)和(−5，−8)，则此抛物线的对称轴是（ D ）

A．$x=4$　　B．$x=3$　　C．$x=-5$　　D．$x=-1$．

3．抛物线 $y=x^2-mx-m^2+1$ 的图象过原点，则 m 为（ D ）

A．0　　B．1　　C．−1　　D．±1

4．已知抛物线 $y=ax^2+x+c$ 与 x 轴一个交点的横坐标是-1，那么 $a+c$=（ B ）

$a-1+c=0$

A．0　　B．1　　C．−1　　D．2

5．把二次函数 $y=x^2-2x-1$ 配方成顶点式为（ B ）　$y=(x-1)^2-2$

A．$y=(x-1)^2$　　B．$y=(x-1)^2-2$

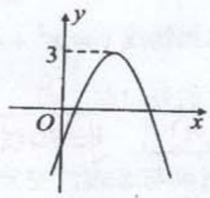
C．$y=(x+1)^2+1$　　D．$y=(x+1)^2-2$

$y=-2x^2-1$

6．直角坐标平面上将二次函数 $y=-2(x-1)^2-2$ 的图象向左平移 1 个单位，再向上平移 1 个单位，则其顶点为（ C ）

A．(0，0)　　B．(1，−2)

C．(0，−1)　　D．(−2，1)



7．函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，那么关于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况是（ A ）

A．有两个不相等的实数根　　B．有两个异号的实数根

C．有两个相等的实数根　　D．没有实数根

8．已知二次函数 $y=x^2+mx+m-5$，则抛物线与 x 轴交点个数（ C ）

$\Delta=m^2-4(m-5)=m^2-4m+20$
$=m^2-4m+4+16$
$=(m-2)^2+16>0$

A．0　　B．1　　C．2　　D．不能确定，与 m 取何值有关

9．函数 $y=kx^2-6x+3$ 的图象与 x 轴有交点，则 k 的取值范围是（ D ）

$\Delta\geq 0$　$\Delta=b^2-4k\times 3=36-12k\geq 0$
$12k\leq 36$
$k\leq 3$

A．$k<3$　　B．$k<3$ 且 $k\neq 0$

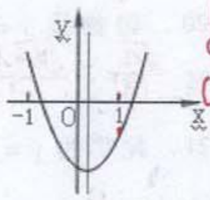
C．$k\leq 3$　　D．$k\leq 3$ 且 $k\neq 0$

10．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如右图所示，则 abc，b^2-4ac，$2a+b$，$a+b+c$ 这四个式子中，值为正数的有（ B ）

\+　−

A．4 个　　B．3 个　　C．2 个　　D．1 个

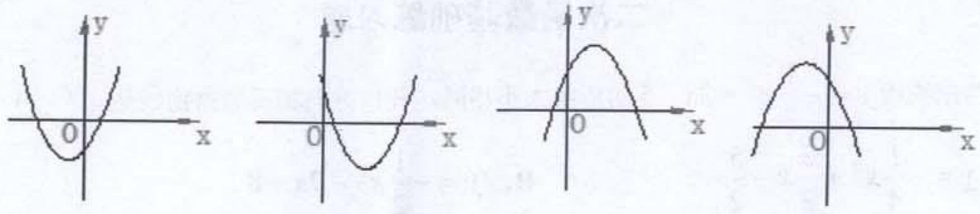
$a>0$
$b<0$
$c<0$
$x=\frac{-b}{2a}<1$
$-b<2a$
$2a+b>0$



11．已知正比例函数 $y=kx$ 的图象在二、四象限，则二次函数 $y=2kx^2-x+k^2$ 的图象大致为（ D ）

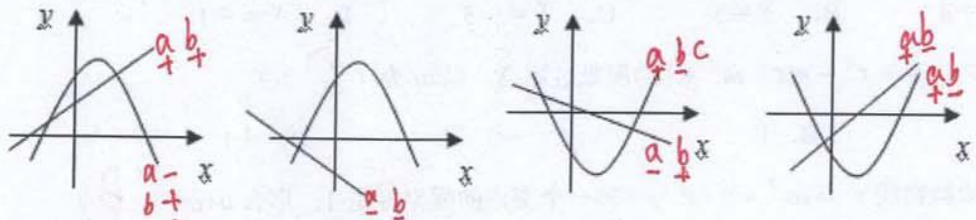
$k<0$

$a<0$　$b=-1$　$k^2>0$



A　　　　B　　　　C　　　　D

12．抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 和直线 $y=ax+b$ 在同一坐标系的图象为（ D ）



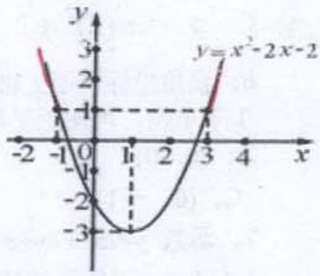
A ×　　　　B ×　　　　C ×　　　　D

13．二次函数 $y=4x^2-mx+5$，当 $x<-2$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-2$ 时，y 随 x 的增大而增大；则当 x=1 时，y 的值为（ D ）　$x=\frac{-b}{2a}=-2$　$\frac{m}{2\times4}=-2$　$m=-16$　$\therefore y=4x^2+16x+5$　$x=1$ 时 $y=25$

A．−7　　　　B．1　　　　C．17　　　　D．25

14．已知函数 $y=x^2-2x-2$ 的图象如右图所示，根据其中提供的信息，可求得使 $y\geq 1$ 成立的 x 的取值范围是（ D ）

A．$-1\leq x\leq 3$　　B．$-3\leq x\leq 1$　　C．$x\geq -3$　　D．$x\leq -1$ 或 $x\geq 3$



15．已知抛物线 $y=x^2+4x+3$，请回答以下问题：

(1)　它的开口向__上__，对称轴是直线__$x=\frac{-4}{2}=-2$__，顶点坐标为__(−2，−1)__．　$y=x^2+4x+4-1=(x+2)^2-1$

(2)　图象与 x 轴的交点为__(−1，0)　(−3，0)__，与 y 轴的交点为__(0，3)__．

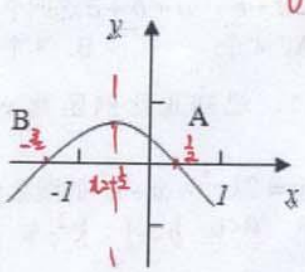
16．抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 过第二、三、四象限，则 a__<__0，b__<__0，c__≤__0（填“>”，“<”或“=”）．

17．抛物线 $y=6(x+1)^2-2$ 可由抛物线 $y=6x^2-2$ 向__左__平移__1__个单位得到．

18．顶点为（−2，−5）且过点（1，−14）的抛物线的解析式为__设 $y=a(x+2)^2-5$ 将(1，−14)代入得．__　$-14=9a-5$　$\therefore a=-1$　$y=-(x+2)^2-5$

19．对称轴是 y 轴且过点 A（1，3）、点 B（−2，−6）的抛物线的解析式为__$y=-3x^2+6$__．　$y=ax^2+c$　$\begin{cases}a+c=3\\4a+c=-6\end{cases}$　$a=-3$　$b=6$

20．抛物线 $y=-2x^2+4x+1$ 在 x 轴上截得的线段长度是__$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{16-4\times(-2)}}{|-2|}$__．$=\frac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$



21．抛物线 $y=x^2+(m-2)x+(m^2-4)$ 的顶点在原点，则 $m=$__2__．

$\begin{cases}\frac{2-m}{2}=0\\ \frac{4(m^2-4)-(m-2)^2}{4}=0\end{cases}$　　$y=a(x-0)^2+0=ax^2$．即 $b=0$ 且 $c=0$

$y=-(x-h)^2+k$

22．抛物线 $y=-x^2-2x+m$，若其顶点在 x 轴上，则 $m=$ <u>-1</u>．

$=-(x^2+2x+1)+m=-(x+1)^2+m$

23．抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 如右图所示，其对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$，设抛物线与 x 轴的两个交点分别为 A、B，其中 A 的横坐标为 $\frac{1}{2}$，则 B 的横坐标为 <u>$-\frac{3}{2}$</u>；$ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 <u>$-\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2}$</u>．

24．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的值永远为负值的条件是 a <u>$<$</u> 0，b^2-4ac <u>$<$</u> 0．

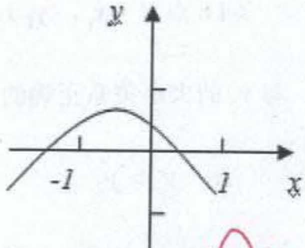
25．一个二次函数的图象顶点坐标为（2，1），形状与抛物线 $y=-2x^2$ 相同，这个函数解析式为 <u>$y=-2(x-2)^2+1$</u>．

26．二次函数 $y=2x-x^2$，当 x <u><1</u> 时，y 随 x 增大而增大，当 x <u>>1</u> 时，y 随 x 增大而减小．

$=-(x^2-2x+1)+1$

$=-(x-1)^2+1$

27．如右图是 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，则(填“>”，“<”或“=”)



a <u>$<$</u> 0，b <u>$<$</u> 0，c <u>$>$</u> 0，

$a+b+c$ <u>$<$</u> 0，$a-b+c$ <u>$>$</u> 0，

b^2-4ac <u>$>$</u> 0，$2a+b$ <u>$<$</u> 0

$-1<\frac{-b}{2a}<0$　　$2a-b<0$

$\frac{-b}{2a}>-1$

$-b<-2a$

28．已知 $y=ax^2+bx+c$ 中，$a<0$，抛物线与 x 轴有两个交点 A（2，0），B（-1，0），则 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 <u>$-1<x<2$</u>；$ax^2+bx+c<0$ 的解集是 <u>$x<-1$ 或 $x>2$</u>．

29．已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 如右图所示，则其对称轴是 <u>直线 $x=2$</u>；如果点 $A(-2,y_1),B(3,y_2)$ 在抛物线上，则 y_1 <u>$>$</u> y_2(填“>”，“<”或“=”)．

30．已知二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 过四个点 $A(3,-5),B(-5,-5),C(-2,y_1),D(3,y_2)$，则 y_1 <u>$>$</u> y_2(填“>”，“<”或“=”)．

31．已知抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 与 x 轴的交点都在原点的右侧，则点 M（a,c）在第 <u>三</u> 象限．

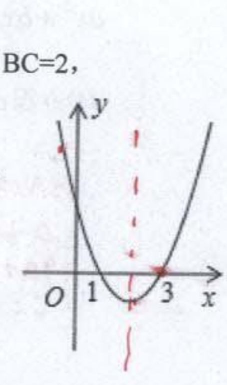
$x_1>0$　$x_2>0$　$\frac{c}{a}>0$

$x_1+x_2>0$　$-\frac{2}{a}>0$

$x_1x_2>0$

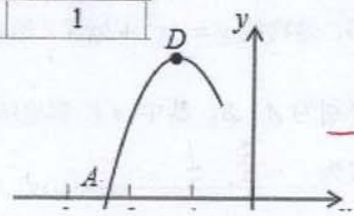
32．已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 y 轴交于点 A，与 x 轴的正半轴交于 B、C 两点，且 BC=2，$S_{\triangle ABC}=3$，则 $c=$ <u>3</u>．

$\frac{1}{2}\times2\times|c|=3$



33．已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，其函数 y 与自变量 x 之间的部分对应值如下表所示，则当 $x=4$ 时，$y=$ <u>4</u>．

x	……	0	1	2	3
y	……	4	1	0	1



34. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，其函数 y 与自变量 x 之间的部分对应值如下表所示：

x	……	0	1	2	3	4	……
y	……	4	1	0	1	4	……

（1）它的开口向___下___，对称轴是直线___x=2___，顶点坐标为___(2,0)___.

（2）图象与 x 轴的交点个数为___1___，与 y 轴的交点坐标为___(0,4)___.

（3）求出二次函数的表达式，画出二次函数的精确图（题目已给出列表）.

（4）点 A（x_1，y_1）、B（x_2，y_2）在函数的图象上，则当 $1<x_1<2, 3<x_2<4$ 时，y_1 与 y_2 的大小关系正确的是（ B ）

A. $y_1>y_2$　　B. $y_1<y_2$　　C. $y_1\geq y_2$　　D. $y_1\leq y_2$

（5）当 $y<1$ 时，x 的取值范围是___1<x<3___.

35. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 D（－1，2），与 x 轴的一个交点 A 在点（－3，0）和（－2，0）之间，其部分图象如图，则以下结论：①$b^2-4ac<0$；②$a+b+c<0$；③$c-a=2$；④方程 $ax^2+bx+c-2=0$ 有两个相等的实数根；⑤抛物线与 x 轴的另一个交点在点（0，0）和（1，0）之间.

其中正确结论的序号是___④. ⑤?___.

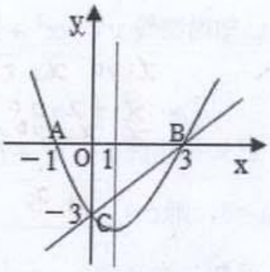
36. 如图，在同一直角坐标系中，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与两坐标轴分别交于 A（-1，0）、点 B（3，0）和点 C（0，-3），一次函数 $y=mx+n$ 的图象与抛物线交于 B、C 两点.

⑴一次函数、二次函数的解析式分别为___y=x-3,___.

⑵当自变量 x ___>1___ 时，两函数的函数值都随 x 增大而增大.

⑶当自变量___0<x<3___时，一次函数值大于二次函数值（即 $ax^2+bx+c<mx+n$）.

⑷方程 $ax^2+bx+c-mx-n=0$ 有___2___个根.



$y=ax^2+bx+c$.
$\begin{cases} a-b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \\ c=-3 \end{cases}$

$y=kx+b$
$\begin{cases} b=-3 \\ 3k+b=0 \end{cases}$
$3k-3=0$